



Angelika Sak
Mathematyczka

MATURA PODSTAWOWA • CIĄG ARYTMETYCZNY

Ciąg arytmetyczny: wzory, zadania i pełne rozwiązania

Zapisz obliczenia na kartce. Rozwiązania otwórz po własnej próbie. Liczba zadań: 10.

Autorska karta pracy Matematyczki - nowa edycja 10.10.2026. To ćwiczenia do powtórki, nie oficjalny arkusz CKE.

Zakres i zastosowanie. 10 autorskich zadań z pełnymi rozwiązaniami, edycja 10.10.2026. Materiał do nauki ciągu arytmetycznego w zakresie matury podstawowej w Formule 2023. Nie jest oficjalnym arkuszem CKE ani prognozą zadań egzaminacyjnych.

WYJAŚNIENIE, PRZYKŁADY I KONTEKST

<https://matematyczka.pl/blog/wpis/ciag-arytmetyczny-zadania-z-odpowiedziami>

ZADANIA 1-5

Różnica, wzór i brakujące dane

ZADANIE 01

Sprawdź, które z trzech podanych czterowyrzazowych ciągów są arytmetyczne: A: 5; 2; -1; -4. B: 3; 6; 12; 24. C: $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3}$. Dla każdego arytmetycznego ciągu podaj różnicę i określ, czy jest rosnący, malejący czy stały.

ZADANIE 02

W ciągu arytmetycznym $a_1 = -2$ i $r = \frac{3}{4}$. Wypisz cztery pierwsze wyrazy i oblicz a_9 .

ZADANIE 03

Ciąg jest określony wzorem $a_n = 11 - 2n$ dla każdego dodatniego całkowitego n . Wykaż, że jest arytmetyczny, i podaj a_1 oraz r . Który wyraz ma wartość -15 ? Czy 0 jest wyrazem tego ciągu? Uzasadnij odpowiedź.

ZADANIE 04

W ciągu arytmetycznym $a_3 = \frac{7}{2}$ i $a_9 = -\frac{11}{2}$. Wyznacz r i a_1 , a następnie zapisz wzór ogólny a_n .

ZADANIE 05

Liczby $2x - 1$; $x + 5$; $3x - 3$ są w podanej kolejności trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz x , oblicz te trzy wyrazy i podaj różnicę r .

ZADANIA 6–10**Sumy i przełożenie treści na wzór****ZADANIE 06**

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 5$ i $r = -2$. Oblicz a_{12} oraz sumę S_{12} pierwszych dwunastu wyrazów.

ZADANIE 07

Ciąg arytmetyczny ma pierwszy wyraz $a_1 = 3$ i różnicę $r = 2$. Suma jego pierwszych n wyrazów wynosi 120. Wyznacz dodatnią całkowitą liczbę n i sprawdź wynik.

ZADANIE 08

W ciągu arytmetycznym suma pięciu pierwszych wyrazów wynosi $S_5 = 40$, a suma dziesięciu pierwszych wyrazów wynosi $S_{10} = 155$. Wyznacz a_1 , r i a_8 .

ZADANIE 09

Widownia ma 12 rzędów. W pierwszym rzędzie jest 18 miejsc, a w każdym następnym o 2 miejsca więcej niż w poprzednim. Ile miejsc jest w dwunastym rzędzie? Ile miejsc jest łącznie na całej widowni?

ZADANIE 10

Ola zaczyna odkładanie pieniędzy od 0 zł. Pod koniec pierwszego tygodnia odkłada 12 zł, a pod koniec każdego następnego tygodnia o 3 zł więcej niż tydzień wcześniej. Nie wypłaca pieniędzy i nie otrzymuje odsetek. Po ilu pełnych tygodniach po raz pierwszy będzie miała co najmniej 200 zł? Podaj także kwotę zgromadzoną wtedy.

CIĄG ARYTMETYCZNY • SPRAWDZENIE WŁASNEJ PRÓBY

Rozwiązania i sprawdzenie

Porównaj kolejne kroki. Jeśli wynik się różni, znajdź pierwszą pomyłkę w zapisie, rachunkach lub jednostkach.

Autorska karta pracy Matematyki · nowa edycja 10.10.2026. To ćwiczenia do powtórki, nie oficjalny arkusz CKE.

ZADANIA 1-5

Różnica, wzór i brakujące dane

ZADANIE 01

A: różnice wynoszą $2 - 5 = -3$, $-1 - 2 = -3$ oraz $-4 - (-1) = -3$. Ciąg A jest arytmetyczny o $r = -3$ i jest malejący. B: kolejne różnice to 3; 6; 12. Nie są równe, więc ciąg B nie jest arytmetyczny. C: każda różnica to $\frac{7}{3} - \frac{7}{3} = 0$. Ciąg C jest arytmetyczny o $r = 0$ i jest stały. Sprawdziliśmy wszystkie różnice w podanych skończonych ciągach.

ZADANIE 02

Każdy kolejny wyraz otrzymujesz, dodając $\frac{3}{4}$. $a_1 = -2 = \frac{-8}{4}$; $a_2 = \frac{-8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{-5}{4}$; $a_3 = \frac{-5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{-1}{2}$; $a_4 = \frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Od pierwszego do dziewiątego wyrazu jest osiem przejść, więc $a_9 = -2 + 8 \cdot \frac{3}{4} = -2 + 6 = 4$. Pierwsze cztery wyrazy to -2 ; $\frac{-5}{4}$; $\frac{-1}{2}$; $\frac{1}{4}$, a $a_9 = 4$.

ZADANIE 03

Dla dowolnego $n \geq 1$ kolejny wyraz ma wartość $11 - 2(n + 1)$. Różnica kolejnego i poprzedniego wyrazu wynosi $11 - 2(n + 1) - (11 - 2n) = -2$. Nie zależy od n , więc ciąg jest arytmetyczny o $r = -2$. $a_1 = 11 - 2 \cdot 1 = 9$. Z równania $11 - 2n = -15$ otrzymujemy $-2n = -26$, czyli $n = 13$. Sprawdzenie: $a_{13} = 11 - 26 = -15$. Natomiast $11 - 2n = 0$ daje $n = \frac{11}{2}$. To nie jest liczba całkowita, więc 0 nie jest wyrazem ciągu.

ZADANIE 04

Od miejsca 3 do miejsca 9 wykonujemy sześć przejść: $a_9 - a_3 = 6r$. Mamy $\frac{-11}{2} - \frac{7}{2} = -9$, więc $6r = -9$ i $r = \frac{-3}{2}$. Ponieważ $a_3 = a_1 + 2r$, otrzymujemy $a_1 = \frac{7}{2} - 2 \cdot (\frac{-3}{2}) = \frac{13}{2}$. Wzór ogólny: $a_n = \frac{13}{2} - (n - 1) \cdot \frac{3}{2}$. Dla $n = 3$ daje $\frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}$, a dla $n = 9$ daje $\frac{13}{2} - 12 = \frac{-11}{2}$, zgodnie z danymi.

ZADANIE 05

Zrównujemy dwie różnice: $(x + 5) - (2x - 1) = (3x - 3) - (x + 5)$. Po uproszczeniu $-x + 6 = 2x - 8$, więc $3x = 14$ i $x = \frac{14}{3}$. Kolejne wyrazy mają wartości $2 \cdot \frac{14}{3} - 1 = \frac{25}{3}$; $\frac{14}{3} + 5 = \frac{29}{3}$; $3 \cdot \frac{14}{3} - 3 = 11$. Sprawdzamy obie różnice: $\frac{29}{3} - \frac{25}{3} = \frac{4}{3}$ oraz $11 - \frac{29}{3} = \frac{4}{3}$. Zatem $r = \frac{4}{3}$.

Sumy i przełożenie treści na wzór

ZADANIE 06

$a_{12} = 5 + 11 \cdot (-2) = -17$. Suma pierwszych dwunastu wyrazów wynosi $S_{12} = \frac{(5 - 17)}{2} \cdot 12 = -6 \cdot 12 = -72$.

Kontrola przez pary: pierwszy i dwunasty wyraz sumują się do -12 ; drugi i jedenasty również do -12 . Takich rozłącznych par jest sześć, więc suma to $6 \cdot (-12) = -72$.

ZADANIE 07

Najpierw $a_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$. Stąd $S_n = \frac{(3 + 2n + 1)}{2} \cdot n = n(n + 2)$. Równanie $n(n + 2) = 120$ daje $n^2 + 2n - 120 = 0$, czyli $(n - 10)(n + 12) = 0$. Otrzymujemy $n = 10$ albo $n = -12$. Odrzucamy -12 , bo liczba wyrazów musi być dodatnia. Dla $n = 10$ ostatni wyraz to $a_{10} = 21$, a $S_{10} = \frac{(3 + 21)}{2} \cdot 10 = 120$. Odpowiedź: $n = 10$.

ZADANIE 08

$a_5 = a_1 + 4r$, więc $S_5 = \frac{(2a_1 + 4r)}{2} \cdot 5 = 40$. Po pomnożeniu przez 2 i podzieleniu przez 5 otrzymujemy $2a_1 + 4r = 16$. Podobnie $a_{10} = a_1 + 9r$ oraz $S_{10} = \frac{(2a_1 + 9r)}{2} \cdot 10 = 155$, stąd $2a_1 + 9r = 31$. Odejmując pierwsze równanie od drugiego, mamy $5r = 15$, czyli $r = 3$. Następnie $2a_1 + 12 = 16$, więc $a_1 = 2$. $a_8 = 2 + 7 \cdot 3 = 23$. Kontrola: $a_5 = 14$ daje $S_5 = \frac{(2 + 14)}{2} \cdot 5 = 40$; $a_{10} = 29$ daje $S_{10} = \frac{(2 + 29)}{2} \cdot 10 = 155$.

ZADANIE 09

Liczba miejsc w rzędzie n to a_n . $a_1 = 18$, $r = 2$ i $n = 12$, zatem $a_{12} = 18 + 11 \cdot 2 = 40$. W dwunastym rzędzie jest 40 miejsc. Łączna liczba miejsc to suma dwunastu wyrazów: $S_{12} = \frac{(18 + 40)}{2} \cdot 12 = 29 \cdot 12 = 348$. Kontrola: sześć par rzędów ma po 58 miejsc, co daje $6 \cdot 58 = 348$ miejsc na całej widowni.

ZADANIE 10

a_n oznacza kwotę jednej wpłaty w tygodniu n , więc $a_n = 12 + 3(n - 1)$. S_n oznacza zgromadzoną kwotę po n wpłatach. Ze wzoru na sumę po uproszczeniu otrzymujemy $S_n = n \cdot \frac{(3n + 21)}{2}$. Po ósmym tygodniu $a_8 = 33$ zł i $S_8 = \frac{(12 + 33)}{2} \cdot 8 = 180$ zł. Po dziewiątym tygodniu $a_9 = 36$ zł i $S_9 = \frac{(12 + 36)}{2} \cdot 9 = 216$ zł. Każda wpłata jest dodatnia, więc zgromadzona kwota rośnie. Skoro po ośmiu tygodniach jest mniej niż 200 zł, a po dziewięciu co najmniej 200 zł, pierwszy taki moment następuje po 9 pełnych tygodniach. Ola ma wtedy 216 zł.

Jedna rzecz do poprawy

Zapisz pierwszy błąd:

Wróć do podobnego zadania po przerwie i spróbuj rozwiązać je samodzielnie.

Źródła i dalsza praca

Dokumenty dotyczą zakresu egzaminu lub materiałów pomocniczych. Stan źródeł: 10 października 2026.

CKE: Informator maturalny z matematyki – poziom podstawowy

Informator od roku szkolnego 2024/2025; wymagania działu VI. Ciągi, m.in. sprawdzanie arytmetyczności i wykorzystanie własności ciągów. Przykłady nie wyczerpują zakresu egzaminu.

<https://bip.cke.gov.pl/attachments/download/10085>

CKE: Wybrane wzory matematyczne – Formuła 2023

Dział 8. Ciągi, strona 9: wzór ogólny, suma i zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

<https://bip.cke.gov.pl/attachments/download/9944>